www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

CONCOURS D'ADMISSION — MATHEMATIQUES 1ère EPREUVE

Voie Générale — Durée 4 H - Coefficient 4

Session de 1990

PROBLÈME I

On considère l'ensemble E des matrices carrées d'ordre 2, symétriques, à coefficients réels ou complexes.

On désigne par F le sous-ensemble de E formé par les matrices M de E telles que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

avec a non nul.

A chaque matrice M de E, on associe la fonction polynôme P_M définie pour tout x par :
$P_M(x) = ax^2 + 2bx + c$.

1°) Caractériser les fonctions polynômes associées aux matrices inversibles de F.
Si M est inversible et M^{-1} son inverse, déterminer $P_{M^{-1}}$.

2°) a) Déterminer le sous-ensemble C de E formé par les matrices telles que le produit de deux matrices de C appartient à E.

b) Montrer que C est formé de sous-ensembles E_∞, E_0, E_k ($k \in \mathbb{R}^*$) tels que :

- Si M est élément de $E_\infty \cap F$; $P_M(x) = 0$ a deux racines opposées.
- Si M est élément de $E_0 \cap F$; $P_M(x) = 0$ a deux racines inverses.
- Si M est élément de $E_k \cap F$; les racines x_1 et x_2 de l'équation $P_M(x) = 0$ vérifient :

$$\frac{x_1 x_2 - 1}{x_1 + x_2} = k \quad \text{avec } k \neq 0.$$

c) A chaque valeur de k correspond un ensemble E_k constitué de matrices notées M_k. Déterminer l'expression générale de ces matrices M_k en fonction de trois paramètres a, b, k.

3°) On considère maintenant les matrices M_k de E_k où k est égal à $sh\ \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}^*$) et où a et b sont deux réels non nuls.
On rappelle que $sh\ \alpha = (e^{\alpha} - e^{-\alpha})/2$.

a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices M_k ainsi définies.

b) Pour tout entier n non nul, on considère la puissance n-ième de M_k : M_k^n.

Sous quelles conditions, l'équation $P_{M_k^n}(x) = 0$ admet-elle deux racines réelles ? * lire $P_{M_k^n}(x) = 0$

Former l'équation $P_{M_k^n}(x) = 0$ pour $a = b = 1$ et $n = 2p$ et calculer ses racines.

*

.../...

4°) Dans cette question, k est un paramètre fixé. A toute matrice inversible

$$N_k = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u - 2kv \end{pmatrix} \quad (u \neq 0),$$

on associe l'application h_{N_k} de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, qui à x fait correspondre y tel que :

$$y = h_{N_k}(x) = \frac{ux + v}{vx + u - 2kv}$$

a) Soit deux matrices inversibles N_k et N'_k de la forme définie ci-dessus. Comparez $h_{N_k} \circ h_{N'_k}$ et $h_{N_k N'_k}$.

Comparez $h_{N_k^{-1}}$ et l'application réciproque de h_{N_k}.

b) Soit M_k une matrice inversible de $E_k \cap F$, et x une racine de l'équation $P_{M_k}(x) = 0$.

Quelle équation vérifie alors $y = h_{M_k}(x)$?

PROBLÈME II :

On considère la famille de fonctions $f_\alpha(x)$ définies pour tout réel x strictement positif par :

$f_\alpha(x) = x^{1 - x^\alpha}$ où α désigne un paramètre réel.

On note C_α la courbe représentative de f_α dans un repère orthonormé du plan.

1°) Étudier les variations de f_α.

2°) Déterminer $\lim f_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 0. Pour quelles valeurs de α la fonction f_α peut-elle être prolongée par continuité au point $x = 0$?
La fonction prolongée admet-elle une dérivée à droite au point $x = 0$?

3°) Étudier la branche infinie de C_α lorsque x tend vers $+\infty$.

4°) On suppose dans cette question que x est un réel strictement positif fixé. $f_\alpha(x)$ est alors une fonction de α avec x pour paramètre ; soit $g_x(\alpha)$.

a) Étudier la fonction g_x et tracer dans un repère orthonormé les représentations graphiques de g_x selon la valeur de x.

b) Déterminer l'ensemble des points du plan tels que chacun d'eux appartient à au moins une courbe C_α.

c) Déterminer les points communs à deux courbes C_α et C_β distinctes.

5°) Déduire de l'étude précédente les différentes formes des courbes C_α suivant la valeur de α et construire dans le même repère une courbe de chaque forme.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail